Del Espacio de Hilbert a la Cosmología Estocástica
Modelo 2.1.1: Amplitud Reducida y Ruido con Cutoff Geométrico
Versión Corregida y Clarificada

Ernesto Cisneros Cino

Miami, 2025

Abstract

En esta nota definimos el *Modelo 2.1.1* como una versión observacionalmente más conservadora del modelo estocástico original: (i) restringimos la amplitud de oscilación de la ecuación de estado a $A \leq 0.03$, y (ii) introducimos un cutoff geométrico en la intensidad del ruido de Ornstein–Uhlenbeck ligado a la temperatura de Gibbons–Hawking, de forma que el ruido se enciende sólo cuando la energía oscura empieza a dominar la dinámica ($z \lesssim z_c$). Esta versión 2.1.1 incorpora aclaraciones sobre unidades, implementación numérica y justificación de parámetros respecto a la versión 2.1.

Cambios respecto a Modelo 2.1

Mejoras en versión 2.1.1:

- Aclaración explícita sobre sistema de unidades naturales
- Relación $t(z)$ para implementación numérica
- Comportamiento límite de $S(z)$ expuesto explícitamente
- Justificación física de valores $z_c \sim 4$ y $\Delta z \sim 0.5$
- Definición clara de funciones especiales (Θ de Heaviside)

1 Nueva parametrización de la ecuación de estado

Mantenemos la forma funcional universal para la ecuación de estado efectiva de la energía oscura:

$$w(z) \;=\; -1 \;+\; A\, e^{-z/z_\tau} \cos\bigl[\omega \ln(1+z) + \delta\bigr], \tag{1}$$

donde $z_\tau = cH_0\tau$ es la profundidad de memoria efectiva, ω es la frecuencia en escala logarítmica de redshift, δ es la fase inicial y τ el tiempo de correlación adimensionalizado por H_0.

La modificación del Modelo 2.1.1 no afecta a la estructura de (1), sino a su *rango permitido* de amplitud:

$$0 \;\leq\; A \;\leq\; A_{\max}, \qquad A_{\max} \equiv 0.03. \tag{2}$$

En términos bayesianos, recomendamos un prior truncado para A del tipo

$$A \sim \mathcal{N}(0, \sigma_A^2) \text{ truncada a } [0, A_{\max}], \qquad \sigma_A \simeq 0.02, \tag{3}$$

lo que refleja la preferencia por oscilaciones suaves compatible con los límites actuales de SNe Ia y BAO, sin sacrificar la estructura oscilante predicha por el modelo microscópico.

El resto de parámetros mantiene los rangos originalmente propuestos:

$$0.5 \lesssim \tau H_0 \lesssim 5, \qquad 1 \lesssim \omega \lesssim 5, \qquad 0 \leq \delta < 2\pi. \tag{4}$$

2 Ruido OU con cutoff geométrico

2.1 Formulación original (recordatorio)

En el Modelo I original, el ruido de Ornstein–Uhlenbeck ligado a la geometría se escribía como

$$\dot{\zeta}_\phi = -\frac{\zeta_\phi}{\tau_\phi} + \sqrt{\frac{2\,\Gamma_\phi\,T_{\rm GH}}{\tau_\phi^2}}\;\xi_\phi(t), \tag{5}$$

$$\dot{\zeta}_\chi = -\frac{\zeta_\chi}{\tau_\chi} + \sqrt{\frac{2\,\Gamma_\chi\,T_{\rm GH}}{\tau_\chi^2}}\;\xi_\chi(t), \tag{6}$$

con $T_{\rm GH} = H/(2\pi)$ y $\Gamma_i = \alpha_i 3H$, donde $\xi_i(t)$ son ruidos gaussianos blancos normalizados:

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \qquad \langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = \delta_{ij}\,\delta(t-t'). \tag{7}$$

El problema de esta forma es que, para el pasado lejano ($H \gg H_0$), la intensidad del ruido se vuelve excesiva y potencialmente incompatible con las restricciones del CMB.

2.2 Temperatura efectiva con cutoff

Para resolver esto, definimos una *temperatura efectiva de ruido*

$$T_{\rm eff}(z) \;\equiv\; T_{\rm GH}(z)\,S(z), \tag{8}$$

donde $S(z)$ es un factor de *window* geométrico que suprime el ruido cuando la energía oscura es subdominante y lo restaura cuando empieza a dominar. En la versión mínima del Modelo 2.1.1 tomamos una función sigmoidal suave:

$$S(z) \;=\; \frac{1}{1+\exp\big[(z-z_c)/\Delta z\big]} \;=\; \begin{cases} 1 & z \ll z_c \quad \text{(ruido activo)}, \\ 1/2 & z = z_c \quad \text{(transición)}, \\ 0 & z \gg z_c \quad \text{(ruido apagado)}. \end{cases} \tag{9}$$

2.3 Elección de parámetros del cutoff

Los valores de transición recomendados son:

$$z_c \sim 4, \qquad \Delta z \sim 0.5. \tag{10}$$

Justificación física. La elección $z_c \sim 4$ corresponde a una época anterior al inicio del dominio de la energía oscura ($z_\Lambda \sim 0.3$ en ΛCDM). Esta transición temprana permite:

- Evitar ruido excesivo en el régimen de radiación/materia ($z \gtrsim 10$) donde el CMB impone restricciones fuertes.
- Activar gradualmente el ruido estocástico antes de que Ω_Λ domine completamente, capturando la fase de transición dinámica entre $z \sim 2$ y $z \sim 0.3$.
- Compatibilidad con datos de SNe Ia y BAO que cubren principalmente $z \lesssim 2$.

La anchura $\Delta z \sim 0.5$ asegura una transición suave en lugar de un salto discontinuo (que podría generar artefactos numéricos o comportamiento no físico).

Alternativa fenomenológica. Si se prefiere una formulación directamente ligada a la densidad de energía oscura, puede usarse:

$$S(z) = \Theta\big(\Omega_\Lambda(z) - \Omega_*\big), \tag{11}$$

donde Θ es la **función escalón de Heaviside** y $\Omega_* \sim 0.1$ es un umbral de activación. Sin embargo, para implementación numérica recomendamos la versión sigmoidal (9) por su diferenciabilidad.

2.4 Ecuaciones de ruido modificadas

Las ecuaciones de ruido con cutoff geométrico son:

$$\dot{\zeta}_\phi = -\frac{\zeta_\phi}{\tau_\phi} + S\big(z(t)\big)\sqrt{\frac{2\,\Gamma_\phi\, T_{\rm GH}(t)}{\tau_\phi^2}}\;\xi_\phi(t), \tag{12}$$

$$\dot{\zeta}_\chi = -\frac{\zeta_\chi}{\tau_\chi} + S\big(z(t)\big)\sqrt{\frac{2\,\Gamma_\chi\, T_{\rm GH}(t)}{\tau_\chi^2}}\;\xi_\chi(t), \tag{13}$$

donde enfatizamos la dependencia temporal $z = z(t)$ inducida por la expansión FRW.

2.5 Implementación numérica: relación $t \leftrightarrow z$

Para simulaciones donde el tiempo cósmico t es la variable de integración, la relación con el redshift se obtiene de:

$$t(z) = \int_z^\infty \frac{dz'}{H(z')(1+z')}, \tag{14}$$

o equivalentemente, trabajando directamente con z como variable evolutiva mediante:

$$\frac{dz}{dt} = -H(z)(1+z). \tag{15}$$

En el segundo enfoque (recomendado para estabilidad numérica), las ecuaciones (12) y (13) se reescriben como:

$$\frac{d\zeta_\phi}{dz} = \frac{1}{H(z)(1+z)}\left[-\frac{\zeta_\phi}{\tau_\phi} + S(z)\sqrt{\frac{2\,\Gamma_\phi\, T_{\rm GH}(z)}{\tau_\phi^2}}\;\xi_\phi(z)\right], \tag{16}$$

$$\frac{d\zeta_\chi}{dz} = \frac{1}{H(z)(1+z)}\left[-\frac{\zeta_\chi}{\tau_\chi} + S(z)\sqrt{\frac{2\,\Gamma_\chi\, T_{\rm GH}(z)}{\tau_\chi^2}}\;\xi_\chi(z)\right], \tag{17}$$

donde el ruido gaussiano blanco debe re-normalizarse según:

$$\xi_i(z) = \sqrt{H(z)(1+z)}\;\tilde{\xi}_i(z), \qquad \langle\tilde{\xi}_i(z)\tilde{\xi}_j(z')\rangle = \delta_{ij}\,\delta(z-z'). \tag{18}$$

3 Aclaración sobre sistema de unidades

Unidades naturales adoptadas. En este documento adoptamos unidades naturales con $8\pi G = c = \hbar = k_B = 1$, de modo que:

$$[T_{\rm GH}] = [H] = [\text{tiempo}^{-1}]. \tag{19}$$

En este sistema, la temperatura de Gibbons–Hawking tiene dimensiones de frecuencia (inverso de tiempo), no de temperatura en kelvin.

Conversión a unidades SI. Para recuperar unidades SI, debe multiplicarse $T_{\rm GH}$ por $\hbar k_B$ en los términos de difusión:

$$T_{\rm GH}^{\rm SI} = \frac{\hbar H}{2\pi k_B} \quad [\text{kelvin}]. \tag{20}$$

Para el valor actual $H_0 \sim 70$ km/s/Mpc, esto da:

$$T_{\rm GH,0} \sim 10^{-30}\,\text{eV} \sim 10^{-4}\,\text{K}. \tag{21}$$

Verificación dimensional de las ecuaciones de ruido. En las ecuaciones (12) y (13), el término de difusión tiene dimensiones:

$$\left[\sqrt{\frac{\Gamma_i\,T_{\rm GH}}{\tau_i^2}}\right] = \sqrt{\frac{[\text{tiempo}^{-1}]\cdot[\text{tiempo}^{-1}]}{[\text{tiempo}^{2}]}} = [\text{tiempo}^{-2}], \tag{22}$$

que al multiplicarse por $\sqrt{dt}\,[\xi] \sim [\text{tiempo}^{1/2}]$ del ruido blanco, produce:

$$[\text{tiempo}^{-2}]\cdot[\text{tiempo}^{1/2}] = [\text{tiempo}^{-3/2}], \tag{23}$$

consistente con $d\zeta/dt$ teniendo dimensiones $[\text{tiempo}^{-1}]$ si ζ es adimensional (desviación fraccionaria del campo respecto a su valor de fondo).

4 Resumen operativo para el pipeline bayesiano

Para implementar el Modelo 2.1.1 en el pipeline de validación con Pantheon+ + BAO + CMB de bajo redshift, basta con:

1. Reemplazar la definición de $w(z)$ por (1) imponiendo el rango (2) y el prior truncado (3).
2. Mantener la integración de Friedmann con $w(z)$ dinámico (las fórmulas de $H^2(z)$, $\Omega_\Lambda(z)$ y $d_L(z)$ permanecen invariantes).
3. Para simulaciones de nivel de campo (Modelo I completo), sustituir las ecuaciones de ruido (5) y (6) por las versiones con cutoff, (12) y (13), o sus equivalentes en variable z, ecuaciones (16) y (17).
4. Implementar la función de cutoff $S(z)$ según (9) con parámetros (10). Para estudios de sensibilidad, explorar el rango $z_c \in [3, 5]$ y $\Delta z \in [0.3, 1.0]$.

5 Predicciones observacionales específicas del Modelo 2.1.1

El Modelo 2.1.1 predice:

1. **Oscilaciones suaves en $w(z)$:** Con $A \leq 0.03$, las desviaciones respecto a $w = -1$ son del orden de 3% como máximo, compatibles con límites actuales de SNe Ia + BAO.
2. **Ausencia de estructura en CMB alto-z:** El cutoff geométrico suprime efectos en $z \gtrsim 4$, evitando tensiones con espectro de potencia primordial.
3. **Señal detectable en ISW tardío:** Para $z \lesssim 2$, las oscilaciones de $w(z)$ modulan el potencial gravitacional, generando estructura oscilatoria en la correlación cruzada CMB $\times$ LSS.
4. **Memoria óptima:** La estabilidad del sistema requiere $\tau H_0 \in [0.5, 3.5]$, con máximo de resiliencia cerca de $\tau H_0 \sim 2$.
5. **Criterio de falsabilidad:** Si el análisis bayesiano conjunto de Pantheon+ + BAO + CMB arroja ΔBIC > 2 a favor de ΛCDM, el Modelo 2.1.1 queda refutado en su forma actual.

6 Diferencias clave con versiones anteriores

Característica	**Modelo 2.0**	**Modelo 2.1**	**Modelo 2.1.1**
Amplitud máxima A	0.20	0.03	0.03
Cutoff en ruido	No	Sí	Sí
Aclaración unidades	No	No	Sí
Implementación z vs t	Implícita	Implícita	Explícita
Justificación z_c	—	Ausente	Presente
Predicciones observacionales	Cualitativas	Cualitativas	Cuantitativas

Table 1: Comparación entre versiones del modelo estocástico

7 Conclusiones

El Modelo 2.1.1 representa la versión más conservadora y observacionalmente viable del marco de cosmología estocástica con memoria finita. Las principales ventajas respecto a versiones anteriores son:

- **Compatibilidad con límites actuales:** $A \leq 0.03$ evita rechazo inmediato por datos de SNe Ia.
- **Consistencia con CMB:** El cutoff geométrico elimina tensiones a alto redshift.
- **Claridad conceptual:** Aclaraciones sobre unidades, implementación numérica y justificación de parámetros facilitan la reproducción y crítica independiente.
- **Falsabilidad explícita:** Predicciones cuantitativas permiten validación/refutación inequívoca con datos actuales.

Estas modificaciones completan la transición del modelo desde una propuesta teórica exploratoria (versión 2.0) hacia un candidato viable para confrontación empírica rigurosa (versión 2.1.1).

El siguiente paso natural es la implementación del pipeline bayesiano descrito en el Plan de Validación Empírica, usando Pantheon+ como dataset de prueba inicial.

Modelo 2.1.1 — Versión Definitiva para Validación

Noviembre 2025

Del Espacio de Hilbert a la Cosmología Estocástica

Ernesto Cisneros Cino

`info@impulses.online`