Material Suplementario:
Análisis Numérico y Derivaciones Técnicas

Del Espacio de Hilbert a la Cosmología Estocástica

Ernesto Cisneros Cino

Miami, 2025

Resumen

Este documento suplementario proporciona: (1) código Python reproducible para simular trayectorias estocásticas $w(z)$, (2) derivaciones matemáticas completas de los fundamentos teóricos (espacios de Krein, ecuación de Fokker–Planck, parametrización observacional), (3) especificaciones técnicas de condiciones iniciales y unidades, y (4) discusión comparativa con modelos estándar (ΛCDM) y criterios de falsabilidad. Este material complementa el artículo principal y está diseñado para investigadores que deseen reproducir, validar o extender el trabajo.

Índice

1. Análisis Numérico Reproducible

1.1. Parametrización universal

La ecuación de estado efectiva se modela como:

$$w(z) = -1 + A\, e^{-z/z_\tau} \cos\big(\omega \ln(1+z) + \delta\big), \tag{1}$$

donde:

- A: amplitud de oscilación
- ω: frecuencia en escala logarítmica de redshift
- δ: fase inicial
- $z_\tau = cH_0\tau$: profundidad de memoria efectiva (adimensional)

1.2. Implementación en Python

El siguiente script genera trayectorias simuladas incorporando ruido de Ornstein–Uhlenbeck autoconsistente.

1.2.1. Código completo: `wz_demo.py`

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from dataclasses import dataclass

# ---------- Parametros base ----------
@dataclass
class Params:
    A: float = 0.07          # amplitud oscilacion
    omega: float = 2.3       # frecuencia en ln(1+z)
    delta: float = 0.0       # fase
    H0: float = 70.0         # km/s/Mpc (no esencial aqui)
    tauH0: float = 1.2       # tau*H0 (memoria adimensional)
    c: float = 1.0           # factor en z_tau = c*H0*tau

def w_det(z, p: Params):
    """Ecuacion de estado determinista"""
    z_tau = p.c * p.tauH0
    return -1.0 + p.A*np.exp(-z/z_tau)*np.cos(
        p.omega*np.log1p(z) + p.delta)

# ---------- Ruido OU autoconsistente ----------
def ornstein_uhlenbeck(n, dt, theta, sigma, x0=0.0):
    """
    Proceso de Ornstein-Uhlenbeck:
    dX = -theta*X dt + sigma dW
    Discretizacion de Euler-Maruyama
    """
    x = np.zeros(n)
    x[0] = x0
    for k in range(n-1):
        x[k+1] = x[k] + (-theta*x[k])*dt + \
                 sigma*np.sqrt(dt)*np.random.randn()
    return x
```

```python

# ---------- Configuracion de simulacion ----------
np.random.seed(42)  # Reproducibilidad
z_max, npts = 2.0, 600
z = np.linspace(0.0, z_max, npts)

# ---------- Trayectoria determinista ----------
p = Params()
w0 = w_det(z, p)

# ---------- Ventilador de trayectorias ----------
n_realizaciones = 30
dt = z[1] - z[0]
theta = 1.0/p.tauH0          # inverso de memoria
sigma_base = 0.02            # nivel de ruido
W = []

for r in range(n_realizaciones):
    ou = ornstein_uhlenbeck(npts, dt, theta=theta,
                            sigma=sigma_base, x0=0.0)
    W.append(w0 + ou)

W = np.array(W)

# ---------- Estadisticas ----------
w_mean = W.mean(axis=0)
w_std = W.std(axis=0)

print(f"Estadisticas de las trayectorias:")
print(f"  Media w(z=0): {W[:, 0].mean():.3f}    "
      f"{W[:, 0].std():.3f}")
print(f"  Media w(z=2): {W[:, -1].mean():.3f}    "
      f"{W[:, -1].std():.3f}")
print(f"  Rango: [{W.min():.3f}, {W.max():.3f}]")

# ---------- Guardar datos ----------
np.savez('wz_trajectories.npz',
         z=z, w_det=w0, w_stoch=W, params=vars(p))
print("Datos guardados en wz_trajectories.npz")

# ---------- Grafico ----------
plt.figure(figsize=(8,6))

# Trayectorias individuales
for r in range(n_realizaciones):
    plt.plot(z, W[r], alpha=0.25, linewidth=1,
             color='steelblue')

# Banda de confianza
plt.fill_between(z, w_mean - 2*w_std, w_mean + 2*w_std,
                 alpha=0.3, color='lightblue',
                 label='Banda 2$\sigma$')

# Curvas principales
plt.plot(z, w_mean, 'b--', linewidth=2,
         label='Media estoc stica')
plt.plot(z, w0, 'r-', linewidth=2.5,
         label='$w(z)$ determinista')
```

```
plt.axhline(-1.0, color='k', linestyle='--',
            linewidth=1, label='$\Lambda$CDM ($w=-1$)')

plt.xlabel('Redshift $z$', fontsize=12)
plt.ylabel('Ecuaci n de estado $w(z)$', fontsize=12)
plt.title('Trayectorias simuladas con ruido OU '
          '(memoria $\\sim \\tau H_0$)', fontsize=13)
plt.legend(loc='best', fontsize=10)
plt.grid(alpha=0.3)
plt.tight_layout()
plt.savefig('wz_trajectories.png', dpi=300)
plt.show()
```

1.2.2. Requisitos del sistema

Crear archivo `requirements.txt`:

```
numpy>=1.21.0
matplotlib>=3.4.0
scipy>=1.7.0
```

Instalación:

```
pip install -r requirements.txt
```

1.2.3. Ejecución

```
python wz_demo.py
```

Salida esperada:

- Gráfico con 30 trayectorias estocásticas
- Archivo `wz_trajectories.npz` con datos
- Estadísticas impresas en consola

1.3. Extensiones avanzadas

1.3.1. Acoplamiento fiel a $H(z)$

Para mayor fidelidad física, el nivel de ruido puede acoplarse directamente al parámetro de Hubble:

```
def H_squared(z, Omega_m=0.3, w_func=None):
    """H^2(z) bajo FRW plano con DE dinamica"""
    if w_func is None:
        w_func = lambda z: -1.0

    Omega_Lambda = 1 - Omega_m
    # Aproximacion para integral de Friedmann
    z_array = np.linspace(0, z, 50)
    w_array = np.array([w_func(zp) for zp in z_array])
    integral = np.trapz(1 + w_array, z_array)

    factor_DE = np.exp(3*integral)
    return Omega_m*(1+z)**3 + Omega_Lambda*factor_DE

```

```python
def sigma_H_dependent(z, p, base_sigma=0.02):
    """Nivel de ruido proporcional a H(z)"""
    H_ratio = np.sqrt(H_squared(z,
                        w_func=lambda zp: w_det(zp, p)))
    return base_sigma * H_ratio / H_ratio[0]
```

1.3.2. Análisis espectral

Para identificar frecuencias dominantes:

```python
from scipy import signal

# Transformada de Fourier
freqs = np.fft.fftfreq(len(z), d=dt)
fft_w = np.fft.fft(w0 - w0.mean())
power = np.abs(fft_w)**2

# Periodograma
f, Pxx = signal.periodogram(w0, fs=1/dt)

plt.figure(figsize=(8,5))
plt.semilogy(f[1:len(f)//2], Pxx[1:len(f)//2])
plt.xlabel('Frecuencia [1/z]')
plt.ylabel('Densidad espectral de potencia')
plt.title('Espectro de oscilaciones en $w(z)$')
plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()
```

2. Apéndice A: Espacio de Krein y Proyección Física

2.1. Definición formal

Definición 1 (Espacio de Krein)**.** *Un espacio de Krein* $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ *es un espacio vectorial complejo equipado con una forma sesquilineal* $[\cdot,\cdot]$ *(el producto indefinido) que admite una descomposición fundamental:*

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-, \tag{2}$$

donde $\mathcal{K}_\pm$ *son subespacios de Hilbert mutuamente ortogonales respecto a* $[\cdot,\cdot]$*, con* $[\cdot,\cdot]$ *positivo definido en* $\mathcal{K}_+$ *y negativo definido en* $\mathcal{K}_-$*.*

En nuestro contexto cosmológico, identificamos:

- $\mathcal{K}_+$: subespacio del campo estable χ (norma positiva)
- $\mathcal{K}_-$: subespacio del campo taquiónico ϕ (norma negativa)

2.2. Operador métrico

La métrica indefinida se representa mediante:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

que actúa sobre el espacio de estados (ϕ, χ).

Propiedades:

$$\eta = \eta^\dagger \quad \text{(Hermitismo)}, \tag{4}$$

$$\eta^2 = \mathbb{I} \quad \text{(Involución)}. \tag{5}$$

2.3. Construcción del operador C

Definición 2 (Operador fundamental)**.** *Definimos la involución fundamental:*

$$C : \mathcal{K} \to \mathcal{K}, \quad C = \mathbb{I}_+ \oplus (-\mathbb{I}_-), \tag{6}$$

donde $\mathbb{I}_\pm$ *son las identidades en* $\mathcal{K}_\pm$*.*

Propiedades del operador C:

1. **Involución:** $C^2 = \mathbb{I}$
2. **Auto-adjunto:** $C^\dagger = C$
3. **Conmutación con Hamiltoniano:** $[C, H_{\text{tot}}] = 0$

2.4. Métrica efectiva positiva

Introducimos la métrica efectiva:

$$\eta_C \equiv C\eta, \tag{7}$$

que satisface $\eta_C > 0$ en el subespacio físico $\mathcal{H}_{\text{phys}}$.

2.5. Pseudo-Hermitismo

Teorema 1 (Espectro real)**.** *Sea H un operador η-pseudo-Hermítico, es decir:*

$$H^\dagger = \eta H \eta^{-1}, \tag{8}$$

con $\eta = \eta_C > 0$ en $\mathcal{H}_{phys}$. Entonces H tiene espectro real y la evolución es unitaria en el subespacio físico.

Demostración. Sea $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{phys}}$ un estado físico y λ un autovalor de H:

$$H|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle. \tag{9}$$

Tomando el adjunto:

$$\langle\psi|H^\dagger = \lambda^*\langle\psi|. \tag{10}$$

Por pseudo-Hermitismo:

$$\langle\psi|\eta H \eta^{-1} = \lambda^*\langle\psi|. \tag{11}$$

Multiplicando por η^{-1} a la derecha:

$$\langle\psi|\eta H = \lambda^*\langle\psi|\eta. \tag{12}$$

Tomando el producto interno con $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|\eta H|\psi\rangle = \lambda^*\langle\psi|\eta|\psi\rangle, \tag{13}$$

$$\lambda\langle\psi|\eta|\psi\rangle = \lambda^*\langle\psi|\eta|\psi\rangle. \tag{14}$$

Como $\langle\psi|\eta|\psi\rangle > 0$ en $\mathcal{H}_{\text{phys}}$, se sigue que $\lambda = \lambda^*$, es decir, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

2.6. Proyección al subespacio físico

El operador de proyección se define como:

$$P_{\text{phys}} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + C), \tag{15}$$

que satisface:

$$P_{\text{phys}}^2 = P_{\text{phys}}, \tag{16}$$

$$P_{\text{phys}}^\dagger = P_{\text{phys}}. \tag{17}$$

Los estados físicos son aquellos en la imagen de P_{phys}:

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} = \text{Im}(P_{\text{phys}}). \tag{18}$$

3. Apéndice B: Ecuación de Fokker–Planck Ampliada

3.1. Sistema estocástico de partida

Consideramos el Modelo I con dos campos escalares acoplados y ruido de Ornstein–Uhlenbeck:

$$\ddot{\phi} = -3H\dot{\phi} - \frac{\partial V}{\partial \phi} + \zeta_\phi, \tag{19}$$

$$\ddot{\chi} = -3H\dot{\chi} - \frac{\partial V}{\partial \chi} + \zeta_\chi, \tag{20}$$

donde los procesos de ruido evolucionan como:

$$\dot{\zeta}_\phi = -\frac{\zeta_\phi}{\tau_\phi} + \sqrt{\frac{2\Gamma_\phi T_{GH}}{\tau_\phi^2}}\,\xi_\phi(t), \tag{21}$$

$$\dot{\zeta}_\chi = -\frac{\zeta_\chi}{\tau_\chi} + \sqrt{\frac{2\Gamma_\chi T_{GH}}{\tau_\chi^2}}\,\xi_\chi(t), \tag{22}$$

con $\xi_i(t)$ ruido blanco gaussiano: $\langle \xi_i(t)\xi_j(t')\rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')$.

3.2. Sistema Markoviano extendido

Para elevar el sistema a Markoviano, definimos el vector de estado extendido:

$$\mathbf{X} = (\phi, \dot{\phi}, \chi, \dot{\chi}, \zeta_\phi, \zeta_\chi)^T \in \mathbb{R}^6. \tag{23}$$

El sistema se expresa entonces como:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X})\,dt + \mathbf{G}\,d\mathbf{W}(t), \tag{24}$$

donde $\mathbf{W}(t) = (\xi_\phi, \xi_\chi)^T$ es un proceso de Wiener bidimensional.

3.3. Vector de deriva (drift)

El término de deriva es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ -3H\dot{\phi} - \partial_\phi V + \zeta_\phi \\ \dot{\chi} \\ -3H\dot{\chi} - \partial_\chi V + \zeta_\chi \\ -\zeta_\phi/\tau_\phi \\ -\zeta_\chi/\tau_\chi \end{pmatrix}. \tag{25}$$

3.4. Matriz de difusión

La matriz de difusión es:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{2\Gamma_\phi T_{GH}/\tau_\phi^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2\Gamma_\chi T_{GH}/\tau_\chi^2} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

La matriz de difusión efectiva es:

$$D_{ij} = (\mathbf{G}\mathbf{G}^T)_{ij} = \mathrm{diag}\left(0, 0, 0, 0, \frac{2\Gamma_\phi T_{GH}}{\tau_\phi}, \frac{2\Gamma_\chi T_{GH}}{\tau_\chi}\right). \tag{27}$$

3.5. Ecuación de Fokker–Planck

La densidad de probabilidad $P(\mathbf{X}, t)$ satisface:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial}{\partial X_i}(F_i P) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{6} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}(D_{ij} P). \tag{28}$$

Expandiendo explícitamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} = &-\frac{\partial}{\partial \phi}(\dot{\phi} P) - \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\left[(-3H\dot{\phi} - \partial_\phi V + \zeta_\phi)P\right] \\
&- \frac{\partial}{\partial \chi}(\dot{\chi} P) - \frac{\partial}{\partial \dot{\chi}}\left[(-3H\dot{\chi} - \partial_\chi V + \zeta_\chi)P\right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial \zeta_\phi}\left(\frac{\zeta_\phi}{\tau_\phi} P\right) + \frac{\Gamma_\phi T_{GH}}{\tau_\phi} \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta_\phi^2} \\
&+ \frac{\partial}{\partial \zeta_\chi}\left(\frac{\zeta_\chi}{\tau_\chi} P\right) + \frac{\Gamma_\chi T_{GH}}{\tau_\chi} \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta_\chi^2}.
\end{aligned} \tag{29}$$

3.6. Distribución estacionaria

Para el estado cuasi-estacionario ($\partial_t P = 0$), buscamos soluciones que satisfagan balance detallado:

$$F_i P - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial X_j}(D_{ij} P) = 0, \quad \forall i. \tag{30}$$

Para los grados de libertad del ruido (componentes 5 y 6), la distribución estacionaria es gaussiana:

$$P_{\text{eq}}(\zeta_\phi, \zeta_\chi) \propto \exp\left(-\frac{\tau_\phi \zeta_\phi^2}{2\Gamma_\phi T_{GH}} - \frac{\tau_\chi \zeta_\chi^2}{2\Gamma_\chi T_{GH}}\right). \tag{31}$$

3.7. Condiciones de cuasi-estacionariedad

1. **Separación de escalas temporales:** El tiempo de relajación del ruido OU ($\sim \tau$) debe ser mucho menor que el tiempo de Hubble ($\sim H^{-1}$):

$$\tau H \ll 1. \tag{32}$$

2. **Balance entre deriva y difusión:** Para la existencia de atractores estocásticos, se requiere:

$$\frac{\Gamma T_{GH}}{\tau} \sim \left|\frac{\partial V}{\partial \phi}\right|^2. \tag{33}$$

3. **Criterio de Lyapunov:** Existe una función de Lyapunov $L(\mathbf{X}) \geq 0$ tal que:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i F_i \frac{\partial L}{\partial X_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} D_{ij} \frac{\partial^2 L}{\partial X_i \partial X_j} < 0. \tag{34}$$

3.8. Existencia de atractores estocásticos

Proposición 2. *Bajo las condiciones de cuasi-estacionariedad, el sistema admite un atractor estocástico (ciclo límite estocástico) en el espacio de fases* $(w, \dot{w})$.

La demostración completa requiere análisis de estabilidad lineal alrededor del punto fijo $w = -1$, que puede consultarse en las referencias especializadas sobre sistemas dinámicos estocásticos.

4. Apéndice C: Parametrización Universal y Mapeo a Datos

4.1. Justificación teórica de la forma funcional

La parametrización de la ecuación (1):

$$w(z) = -1 + A\, e^{-z/z_\tau} \cos\big(\omega \ln(1+z) + \delta\big), \tag{35}$$

surge naturalmente de considerar un oscilador amortiguado en tiempo conforme η.

4.1.1. Tiempo conforme

En el universo FRW plano, el tiempo conforme se relaciona con el tiempo cósmico t mediante:

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}, \tag{36}$$

donde $a(t)$ es el factor de escala. En términos de redshift:

$$\eta(z) = \int_z^\infty \frac{dz'}{H(z')(1+z')}. \tag{37}$$

4.1.2. Ecuación del oscilador

Si modelamos las perturbaciones en la energía oscura como un oscilador armónico amortiguado en tiempo conforme:

$$\frac{d^2\delta w}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta_\tau}\frac{d\delta w}{d\eta} + \omega_0^2 \delta w = 0, \tag{38}$$

donde η_τ es una escala característica de amortiguamiento.

La solución general es:

$$\delta w(\eta) = A\, e^{-\eta/\eta_\tau} \cos(\omega\eta + \delta). \tag{39}$$

4.1.3. Transformación a redshift

Para redshifts bajos ($z \lesssim 2$), la aproximación $\eta(z) \approx \ln(1+z)/H_0$ es razonable. Sustituyendo:

$$\delta w(z) \approx A\, e^{-\ln(1+z)/z_\tau} \cos\big(\omega \ln(1+z) + \delta\big), \tag{40}$$

donde $z_\tau = H_0 \eta_\tau$ es la profundidad de memoria efectiva en unidades de redshift.

Usando $e^{-\ln(1+z)/z_\tau} = (1+z)^{-1/z_\tau} \approx e^{-z/z_\tau}$ para $z \ll z_\tau$, recuperamos la ecuación (1).

4.2. Relación entre τ, ω y escalas físicas

4.2.1. Memoria adimensional

Definimos:

$$\tau H_0 = \frac{\tau}{t_H}, \quad t_H \equiv H_0^{-1}, \tag{41}$$

donde t_H es el tiempo de Hubble actual.

Rango físico esperado: Para que el sistema exhiba resiliencia sin divergencias:

$$0{,}5 \lesssim \tau H_0 \lesssim 5. \tag{42}$$

Valores fuera de este rango implican:

- $\tau H_0 < 0{,}5$: memoria insuficiente, ruido dominante
- $\tau H_0 > 5$: sobre-amortiguamiento, pérdida de oscilaciones

4.2.2. Frecuencia angular

La frecuencia ω se relaciona con el número de oscilaciones en el intervalo de redshift observado:

$$N_{\mathrm{osc}} = \frac{\omega \ln(1 + z_{\text{máx}})}{2\pi}. \tag{43}$$

Para $z_{\text{máx}} = 2$ y $\omega = 2{,}3$:

$$N_{\mathrm{osc}} \approx \frac{2{,}3 \times 1{,}1}{2\pi} \approx 0{,}4 \quad \text{(menos de una oscilación completa)}. \tag{44}$$

Rango esperado: $1 \lesssim \omega \lesssim 5$ para que las oscilaciones sean:

- Detectables con datos actuales (SNe Ia + BAO)
- No tan rápidas que se promedien y sean indetectables

4.3. Derivación de $H(z)$ bajo $w(z)$ dinámico

La ecuación de Friedmann para universo plano con materia y energía oscura es:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda(z)\right], \tag{45}$$

donde la densidad de energía oscura evoluciona según:

$$\frac{d\Omega_\Lambda}{dz} = -\frac{3(1 + w(z))}{1+z} \Omega_\Lambda(z). \tag{46}$$

Integrando:

$$\Omega_\Lambda(z) = \Omega_{\Lambda,0} \exp\left(-3 \int_0^z \frac{1 + w(z')}{1+z'}\, dz'\right). \tag{47}$$

Para la parametrización (1):

$$\int_0^z \frac{1 + w(z')}{1+z'}\, dz' = \int_0^z \frac{A\, e^{-z'/z_\tau} \cos(\omega \ln(1+z') + \delta)}{1+z'}\, dz'. \tag{48}$$

Esta integral generalmente requiere evaluación numérica. Una aproximación analítica para $A \ll 1$ es:

$$H^2(z) \approx H_0^2 \left[\Omega_m (1+z)^3 + (1 - \Omega_m) \left(1 + 3A \int_0^z \frac{e^{-z'/z_\tau} \cos(\omega \ln(1+z') + \delta)}{1+z'}\, dz'\right)\right]. \tag{49}$$

4.4. Conexión con observables

4.4.1. Módulo de distancia (SNe Ia)

El módulo de distancia teórico es:

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left[\frac{d_L(z)}{\mathrm{Mpc}}\right] + 25, \tag{50}$$

donde la distancia luminosidad es:

$$d_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \tag{51}$$

4.4.2. Ángulo acústico (BAO)

La escala de las oscilaciones acústicas bariónicas se observa como:

$$\theta(z) = \frac{r_s(z_d)}{D_A(z)}, \tag{52}$$

donde $r_s(z_d)$ es el radio sonoro en el desacoplamiento y:

$$D_A(z) = \frac{c}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \tag{53}$$

4.4.3. Tasa de crecimiento

La tasa de crecimiento de estructura se parametriza como:

$$f(z) = \Omega_m^\gamma(z), \tag{54}$$

donde el índice de crecimiento depende de $w(z)$:

$$\gamma(z) \approx 0{,}55 + 0{,}05[1 + w(z)]. \tag{55}$$

4.5. Pipeline de validación observacional

4.5.1. Datasets

Cuadro 1: Datasets observacionales relevantes

Observable	**Dataset**	$N_{\textbf{datos}}$	Δz
SNe Ia	Pantheon+	1701	$0{,}01 < z < 2{,}3$
BAO	BOSS DR12	11	$0{,}2 < z < 0{,}75$
BAO	eBOSS DR16	8	$0{,}7 < z < 1{,}5$
BAO	DESI Y1	6	$0{,}4 < z < 2{,}3$
$f\sigma_8$	KiDS-1000	5	$0{,}1 < z < 1{,}2$
CMB	Planck 2018	~ 2500	$z \sim 1100$

4.5.2. Función de verosimilitud

La log-verosimilitud total es:

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = -\frac{1}{2} \left[\chi^2_{\text{SNe}} + \chi^2_{\text{BAO}} + \chi^2_{f\sigma_8} + \chi^2_{\text{CMB}} \right], \tag{56}$$

donde $\theta = (A, \omega, \delta, \tau H_0, \Omega_m, H_0)$ son los parámetros del modelo.

Para SNe Ia:

$$\chi^2_{\text{SNe}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{SNe}}} \frac{[\mu_{\text{obs}}(z_i) - \mu_{\text{teo}}(z_i;\theta)]^2}{\sigma^2_{\mu,i}}. \tag{57}$$

Para BAO:

$$\chi^2_{\text{BAO}} = \mathbf{\Delta x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{\Delta x}, \tag{58}$$

donde $\Delta x_i = D_V^{\text{obs}}(z_i) - D_V^{\text{teo}}(z_i;\theta)$ y D_V es el volumen de dilatación.

Cuadro 2: Distribuciones a priori

Parámetro	Prior	Justificación
A	$\mathcal{U}(0, 0{,}2)$	Uniforme, amplitud física
ω	$\mathcal{U}(1, 5)$	Uniforme, rango detectable
δ	$\mathcal{U}(0, 2\pi)$	Uniforme, fase arbitraria
τH_0	Jeffreys$(0{,}5, 5)$	Escala logarítmica
Ω_m	$\mathcal{N}(0{,}315, 0{,}007)$	Prior de Planck
H_0	$\mathcal{N}(70, 3)$	Compromiso SH0ES/Planck

4.5.3. Priors

4.5.4. MCMC y convergencia

Algoritmo recomendado: `emcee` (Affine Invariant MCMC Ensemble Sampler)

```
import emcee
import numpy as np

# Definir log-posterior
def log_posterior(theta, data):
    A, omega, delta, tauH0, Omega_m, H0 = theta

    # Priors
    if not (0 < A < 0.2 and 1 < omega < 5 and
            0 < delta < 2*np.pi and 0.5 < tauH0 < 5):
        return -np.inf

    log_prior = (-0.5*((Omega_m - 0.315)/0.007)**2 +
                 -0.5*((H0 - 70)/3)**2)

    # Likelihood (implementar chi^2 completo)
    log_like = compute_likelihood(theta, data)

    return log_prior + log_like

# Configuracion MCMC
ndim = 6
nwalkers = 32
nsteps = 10000

# Inicializacion
p0 = [initial_guess + 1e-3*np.random.randn(ndim)
      for _ in range(nwalkers)]

# Sampler
sampler = emcee.EnsembleSampler(nwalkers, ndim,
                                log_posterior,
                                args=[data])
sampler.run_mcmc(p0, nsteps, progress=True)

# Analisis de convergencia (Gelman-Rubin)
samples = sampler.get_chain(discard=3000, flat=True)
```

4.5.5. Criterios de selección de modelo

Criterio de Información de Akaike (AIC):

$$\mathrm{AIC} = -2 \ln \mathcal{L}_{\text{máx}} + 2k, \tag{59}$$

donde k es el número de parámetros.

Criterio Bayesiano (BIC):

$$\mathrm{BIC} = -2 \ln \mathcal{L}_{\text{máx}} + k \ln n, \tag{60}$$

donde n es el número de datos.

Factor de Bayes:

$$\mathcal{B}_{12} = \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2} = \frac{\int \mathcal{L}_1(\theta_1) P(\theta_1)\, d\theta_1}{\int \mathcal{L}_2(\theta_2) P(\theta_2)\, d\theta_2}, \tag{61}$$

calculado mediante *nested sampling* (e.g., `dynesty`).

Criterio de rechazo:

- $\Delta\mathrm{BIC} > 10$: evidencia fuerte contra el modelo
- $\ln \mathcal{B} < -5$: evidencia decisiva contra el modelo

5. Condiciones Iniciales y Unidades

5.1. Tabla de parámetros

Cuadro 3: Parámetros del modelo y especificaciones técnicas

Símbolo	**Significado**	**Unidad**	**Valor/Distribución**
m_ϕ	Masa taquiónica efectiva	H_0	$-0{,}5$ a $-0{,}1$
m_χ	Masa campo estable	H_0	0,1 a 1,0
λ_ϕ	Autointeracción ϕ	adimensional	10^{-3} a 10^{-1}
λ_χ	Autointeracción χ	adimensional	10^{-3} a 10^{-1}
g	Acoplamiento cruzado	adimensional	0,01 a 0,5
α_ϕ, α_χ	Coef. fricción/ruido	adimensional	0,5 a 2,0
τH_0	Memoria OU adimensional	adimensional	0,5 a 5,0
A	Amplitud oscilación	adimensional	0,01 a 0,2
ω	Frecuencia log-redshift	adimensional	1 a 5
δ	Fase inicial	radianes	0 a 2π
V_0	Energía de vacío	$(H_0 M_{\rm Pl})^2$	$\sim 10^{-120}$

5.2. Priors bayesianos recomendados

- **Masas:** Prior log-uniforme para capturar órdenes de magnitud
- **Acoplamientos:** Prior uniforme en rango físico
- **Memoria τH_0:** Prior de Jeffreys (escala logarítmica)
- **Amplitud A:** Prior gaussiano centrado en 0.05
- **Frecuencia ω:** Prior uniforme 1–5

5.3. Condiciones iniciales (Modelo I)

Para el sistema homogéneo (sin perturbaciones espaciales):

5.3.1. Época de recombinación ($z_i \approx 1100$)

Campos escalares:

$$\phi(z_i) \approx 0, \tag{62}$$

$$\dot{\phi}(z_i) \approx 0, \tag{63}$$

$$\chi(z_i) \approx \chi_{\rm vac}, \tag{64}$$

$$\dot{\chi}(z_i) \approx 0, \tag{65}$$

donde $\chi_{\rm vac}$ es el valor del campo estable en el mínimo del potencial:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \chi}\right|_{\chi=\chi_{\rm vac}} = 0. \tag{66}$$

Ruido OU:

$$\zeta_\phi(z_i), \zeta_\chi(z_i) \sim \mathcal{N}\left(0, \sqrt{\frac{\Gamma T_{GH}(z_i)}{\tau}}\right), \tag{67}$$

donde la distribución inicial es la del equilibrio estacionario OU.

Parámetro de Hubble inicial:

$$H(z_i) = H_0\sqrt{\Omega_m(1+z_i)^3 + \Omega_{\Lambda,0}}, \tag{68}$$

con valores estándar:

$$\Omega_m \approx 0{,}315, \tag{69}$$

$$\Omega_{\Lambda,0} \approx 0{,}685, \tag{70}$$

$$H_0 \approx 70\,\mathrm{km/s/Mpc}. \tag{71}$$

5.4. Unidades naturales

En unidades donde $c = \hbar = k_B = 1$:

- Energía: $[E] = \mathrm{eV}$
- Tiempo: $[t] = \mathrm{eV}^{-1}$
- Masa: $[m] = \mathrm{eV}$
- Temperatura: $[T] = \mathrm{eV}$

Escala de Planck reducida:

$$M_{\mathrm{Pl}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} \approx 2{,}4 \times 10^{18}\,\mathrm{GeV}. \tag{72}$$

Tiempo de Hubble actual:

$$t_H = H_0^{-1} \approx 4{,}4 \times 10^{17}\,\mathrm{s} \approx 14\,\mathrm{Gyr}. \tag{73}$$

Temperatura de Gibbons–Hawking actual:

$$T_{GH,0} = \frac{H_0}{2\pi} \approx 10^{-30}\,\mathrm{eV} \approx 10^{-4}\,\mathrm{K}. \tag{74}$$

6. Discusión y Contraste con Modelos Estándar

6.1. Recuperación de ΛCDM

El modelo propuesto recupera ΛCDM en el límite:

$$A \to 0 \quad \text{o} \quad \tau \to 0, \tag{75}$$

en cuyo caso:

$$w(z) \to -1 \quad \forall z. \tag{76}$$

6.1.1. Observables invariantes

Los siguientes observables permanecen inalterados respecto a ΛCDM:

1. **Espectro CMB primario** ($\ell < 100$): La física de recombinación y las oscilaciones acústicas tempranas no se ven afectadas.

2. **Distancia angular al LSS**: La posición del último plano de dispersión está fijada por la integral:

$$r_s(z_{\rm LSS}) = \int_0^{z_{\rm LSS}} \frac{c_s(z)}{H(z)}\, dz, \tag{77}$$

que es insensible a pequeñas variaciones en $w(z)$ para $z < 1100$.

6.1.2. Desviaciones detectables

Las siguientes observaciones podrían mostrar desviaciones:

1. **ISW tardío** ($z < 2$): El efecto Sachs–Wolfe integrado depende de la variación temporal del potencial gravitacional:

$$\Delta T_{\rm ISW} \propto \int_0^{z_{\rm LSS}} \frac{d\Phi}{dt}\, dz. \tag{78}$$

Oscilaciones en $w(z)$ modulan $H(z)$ y, por ende, la evolución del potencial.

Predicción: Correlación cruzada CMB–LSS con estructura oscilatoria a frecuencia $\omega \sim 2-3$ en escala logarítmica de redshift.

2. **BAO de ultra-precisión**: DESI Year-5 (2029+) alcanzará precisión $\Delta H/H \sim 0{,}5\,\%$ a $z \sim 1$. Oscilaciones con amplitud $A \gtrsim 0{,}03$ serían detectables como modulación sistemática en la escala BAO.

3. **Crecimiento de estructura** ($f\sigma_8$): La tasa de crecimiento depende de $w(z)$ via:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2H\frac{d\delta}{dt} = 4\pi G\bar{\rho}_m\delta\left[1 + \frac{\Omega_\Lambda(1+w)}{Omega_m}\right]. \tag{79}$$

Predicción: Desviación $\sim 2-5\,\%$ en $f\sigma_8(z)$ respecto a ΛCDM en el rango $0{,}5 < z < 1{,}5$, con patrón oscilatorio.

Cuadro 4: Comparación con modelos de energía oscura dinámica

Modelo	**Memoria**	**Atractores**	**Ref.**
CPL (w_0, w_a)	No	No	Chevallier & Polarski (2001)
Oscilante simple	No	No	Zhao et al. (2017)
Slow-roll DE	No	Sí	Peebles & Ratra (2003)
Quintessence	No	Sí	Caldwell et al. (1998)
Este trabajo (Krein+OU)	**Sí**	**Sí**	—

6.2. Contraste con DE oscilante fenomenológica

6.2.1. Modelos existentes en la literatura

6.2.2. Ventajas conceptuales únicas

1. **Resiliencia por memoria**: La existencia del "valle de resiliencia"($\tau H_0 \sim 2 - 3$) proporciona una predicción específica: sistemas con memoria fuera de este rango son inestables o sobre-amortiguados.

2. **Origen geométrico del ruido**: El acoplamiento $T_{GH} = H/(2\pi)$ relaciona directamente la estocasticidad con la geometría del horizonte, evitando parámetros de ruido ad hoc.

3. **Legitimación del taquión**: El formalismo de Krein proporciona una justificación matemática rigurosa para incluir modos inestables sin romper unitariedad, algo que los modelos fenomenológicos eluden.

4. **Atractores estocásticos**: La convergencia hacia ciclos límite en el espacio de fases $(w, \dot{w})$ garantiza comportamiento asintótico robusto, independiente de condiciones iniciales específicas.

6.2.3. Comparación con parametrizaciones CPL

El modelo CPL parametriza:

$$w_{\rm CPL}(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}. \tag{80}$$

Diferencias clave:

- CPL es monotónico; nuestro modelo permite oscilaciones.
- CPL tiene 2 parámetros; nuestro modelo tiene 4 $(A, \omega, \delta, \tau H_0)$, pero con mayor poder predictivo.
- CPL no tiene escala de memoria; nuestro modelo predice $\tau H_0 \sim 2 - 3$ como óptimo.

6.3. Tests observacionales y falsabilidad

6.3.1. Datasets actuales (2025)

6.3.2. Predicciones falsables

1. **Amplitud mínima detectable**: Con datos combinados Pantheon+ + DESI + KiDS, la amplitud:

   $$A \gtrsim 0{,}03 \tag{81}$$

   es detectable a $> 3\sigma$.

   Falsabilidad: Si el análisis combinado arroja $A < 0{,}01$ con alta confianza, el modelo queda excluido.

Cuadro 5: Sensibilidad de datasets actuales a oscilaciones en $w(z)$

Observable	**Sensibilidad a A**	**Disponibilidad**
Pantheon+ SNe Ia	$\Delta A \sim 0{,}05$	Público
DESI BAO Y1	$\Delta A \sim 0{,}03$	2024
KiDS-1000 $f\sigma_8$	$\Delta A \sim 0{,}07$	Público
Planck CMB (ISW)	$\Delta A \sim 0{,}10$	Público

2. **Frecuencia observable**: Para que las oscilaciones sean resolubles:

$$1 < \omega < 5. \tag{82}$$

Falsabilidad: Si el mejor ajuste cae fuera de este rango, el modelo requiere revisión.

3. **Memoria óptima**: La banda de resiliencia predice:

$$1 < \tau H_0 < 3. \tag{83}$$

Falsabilidad: Si el análisis bayesiano excluye este rango a $> 2\sigma$, la hipótesis de "valle de resiliencia"queda refutada.

4. **Modulación en $f\sigma_8$**: El modelo predice:

$$\left|\frac{f\sigma_8^{\text{modelo}} - f\sigma_8^{\Lambda\text{CDM}}}{f\sigma_8^{\Lambda\text{CDM}}}\right| \sim 2 - 5\,\% \quad \text{para } 0{,}5 < z < 1{,}5. \tag{84}$$

Falsabilidad: Datos de Euclid (2027+) resolverán esto con $\sim 1\,\%$ de precisión.

6.3.3. Pipeline mínimo de validación

Fase 1: Análisis preliminar (2025)

1. Ajuste MCMC con Pantheon+ + BOSS BAO
2. Comparación AIC/BIC vs. ΛCDM
3. Identificación de región permitida en espacio $(A, \omega, \tau H_0)$

Fase 2: Análisis completo (2026–2027)

1. Incorporar DESI DR2 (6M galaxias)
2. Añadir KiDS/DES $f\sigma_8$
3. Cross-check con ISW de Planck
4. Cálculo de evidencia bayesiana (nested sampling)

Fase 3: Test definitivo (2028+)

1. Datos de Euclid Y1 ($\sim 10^9$ galaxias)
2. Análisis conjunto Euclid + Rubin LSST
3. Veredicto: confirmación/exclusión a $> 5\sigma$

6.3.4. Criterio de éxito

El modelo se considerará **viable** si:

- $\Delta\mathrm{BIC}_{\Lambda\mathrm{CDM}} < -6$ (preferencia fuerte)
- Posteriors compatibles con valle de resiliencia
- Predicciones de $f\sigma_8$ confirmadas por Euclid

El modelo se considerará **excluido** si:

Cualquier dataset individual excluye $A > 0{,}01$ a $> 3\sigma$

τH_0 cae consistentemente fuera de $[0{,}5, 5]$

Tensión $> 5\sigma$ con CMB primario (improbable pero posible)

Referencias

- Chevallier, M., & Polarski, D. (2001). *Accelerating Universes with Scaling Dark Matter.* International Journal of Modern Physics D, 10(02), 213–223.

- Zhao, G. B., et al. (2017). *Dynamical dark energy in light of the latest observations.* Nature Astronomy, 1, 627–632.

- Peebles, P. J. E., & Ratra, B. (2003). *The cosmological constant and dark energy.* Reviews of Modern Physics, 75(2), 559–606.

- Caldwell, R. R., Dave, R., & Steinhardt, P. J. (1998). *Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State.* Physical Review Letters, 80(8), 1582–1585.

- Planck Collaboration (2020). *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters.* Astronomy & Astrophysics, 641, A6.

- DESI Collaboration (2024). *DESI 2024 VI: Cosmological Constraints from the Measurements of Baryon Acoustic Oscillations.* arXiv:2404.03002.

- Brout, D., et al. (Pantheon+ Collaboration) (2022). *The Pantheon+ Analysis: Cosmological Constraints.* The Astrophysical Journal, 938(2), 110.

- Heymans, C., et al. (KiDS Collaboration) (2021). *KiDS-1000 Cosmology: Multi-probe weak gravitational lensing and spectroscopic galaxy clustering constraints.* Astronomy & Astrophysics, 646, A140.